**§ 1. Комплексные числа**

**п. 1. Определение комплексных чисел. Изображение комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел**

***Определение*.** *Комплексным числом*  называется выражение вида , где  и  – действительные числа. При этом число  называется *действительной частью* комплексного числа и обозначается , а число  – *мнимой частью* комплексного числа и обозначается ;  – *мнимая единица*,  или .

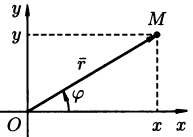
Множество комплексных чисел обозначается .

Если , то  – действительное число; если , то  – *чисто мнимое число*.

Два комплексных числа  и  называются *сопряженными*. Для них справедливы формулы: ; .

***Пример.*** Записать действительную и мнимую части чисел: , , .

*▲ Решение*. . *▲*

Всякое комплексное число  можно изобразить на плоскости *Oxy* в виде точки , где  – абсцисса точки ,  – ордината точки . И наоборот, любой точке  плоскости *Oxy* соответствует единственное комплексное число . Таким образом, множество комплексных чисел  находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством точек плоскости *Oxy*.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс *Ox* называется *действительной осью*, а ось ординат *Oy* – *мнимой осью*.

Комплексное число  можно изобразить и с помощью радиус-вектора . Рис. 1

Длина вектора , изображающего комплексное число , называется *модулем* комплексного числа  и обозначается  или . Модуль  однозначно определяется по формуле

.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором , изображающим комплексное число , называется *аргументом* этого комплексного числа и обозначается .

Аргумент комплексного числа  – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого : , где  – *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке , т. е. .

Аргумент комплексного числа  не определен.

***Замечание.*** В качестве значения аргумента комплексного числа  можно брать величину, принадлежащую промежутку .

Аргумент  комплексного числа  определяется из формул:

, где .

Аргумент комплексного числа  можно найти, используя формулу . Так как , то из формулы  находим:



***Формы записи комплексных чисел***

1.  – *алгебраическая форма* комплексного числа, , ;
2.  – *тригонометрическая форма* комплексного числа,   определяется из формул:  или ;
3.  – *показательная* (*экспоненциальная*) *форма* комплексного числа.

Из последних двух форм записи комплексных чисел получаем формулу

,

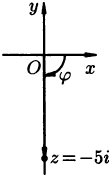
которая называется ***формулой Эйлера***.

***Пример.*** Записать комплексное число в тригонометрической и показательной формах:

а) ; б) ; в) .

Изобразить эти числа на комплексной плоскости.

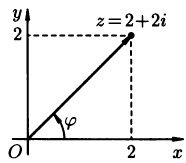
*▲ Решение*.

а) Найдем модуль и аргумент комплексного числа : , следовательно, .

Тригонометрическая форма числа : .

Показательная форма этого числа: .

Изобразим число  на комплексной плоскости.

б) Для комплексного числа  имеем: . Следовательно, . Значит,

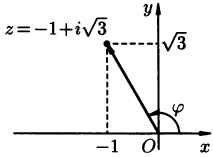
 – тригонометрическая форма

комплексного числа;

 – показательная форма комплексного числа.

Изобразим число  на комплексной плоскости.

в) Имеем:  . Значит,

  – тригонометрическая форма комплексного числа;

 – показательная форма комплексного числа.

Изобразим число  на комплексной плоскости. *▲*

**п. 2. Действия над комплексными числами**

Пусть комплексные числа  и  представлены в *алгебраической форме* записи:  и . Тогда:

1. ;
2. ;
3. ;
4.  .
5. .

***Пример.*** Найти , если .

*▲ Решение*. Используя формулы 1) – 4), последовательно находим:

;

;

;

;

. *▲*

*Тригонометрическую и показательную формы* комплексного числа целесообразно применять при умножении комплексных чисел и возведении их в степень.

Пусть . Тогда

,

то есть при умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической или показательной форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Отсюда следует ***формула Муавра*** для возведения комплексных чисел в натуральную степень:

.

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической или показательной форме, осуществляется по формуле

.

Корень *n*-ой степени из комплексного числа  имеет *n* различных значений, которые находятся по формуле

.

***Пример.*** Найти .

*▲ Решение*. Запишем число  в тригонометрической форме и применим формулу Муавра.

Так как  (см. пример выше), то по формуле Муавра при  имеем:

. *▲*

***Пример.*** Решить уравнение .

*▲ Решение*. Запишем уравнение в виде  и представим число  в тригонометрической форме:

.

Используя формулу для извлечения корня *n*-ой степени из комплексного числа, находим

.

Полагая , получим

,

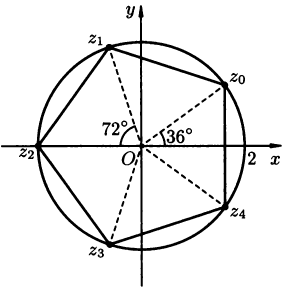
,

,

,

.

Найденным корням уравнения соответствуют вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса  с центром в начале координат.

*▲*